Exámenes de Selectividad

Física. Madrid 2022, Extraordinaria

mentoor.es

Pregunta 1. Opción A. Campo Gravitatorio

El satélite *Sentinel-1*, que forma parte del programa Copernicus, ha suministrado imágenes muy útiles para el estudio de la erupción del volcán de La Palma en 2021. *Sentinel-1* tiene una masa de 2300 kg y se encuentra en una órbita circular a 700 km sobre la superficie terrestre.

a) **Deduzca la expresión que relaciona el periodo del satélite, T, con el radio de su órbita, r, la constante de Gravitación Universal, G, y la masa de la Tierra, M_T. Calcule el tiempo que tarda *Sentinel-1* en dar una vuelta completa en su órbita.**

b) **Deduzca la expresión de la energía mecánica total de un satélite de masa m en una órbita circular de radio r, expresándola en función de G, M_T, m y r. Obtenga la energía mecánica total del satélite *Sentinel-1*.**

Datos: Constante de Gravitación Universal, $G = 6,67\cdot 10^{-11}$ N m^{2}kg^{-2}; Masa de la Tierra, $M_T = 5,97\cdot 10^{24}$ kg; Radio de la Tierra, $R_T = 6,37\cdot 10^6$ m.

Solución:

a) **Deduzca la expresión que relaciona el periodo del satélite, T, con el radio de su órbita, r, la constante de Gravitación Universal, G, y la masa de la Tierra, M_T. Calcule el tiempo que tarda *Sentinel-1* en dar una vuelta completa en su órbita.**

Cuando un satélite describe una órbita circular, la fuerza gravitatoria actúa como fuerza centrípeta, siendo dichas fuerzas, respectivamente,

$$F_g = \frac{GM_T m}{r^2} \quad \text{y} \quad F_c = \frac{mv^2}{r}.$$

Igualando ambas fuerzas:

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{GM_T m}{r^2}.$$

Simplificando la masa m y multiplicando ambos lados por r:

$$v^2 = \frac{GM_T}{r}.$$

La velocidad orbital también se relaciona con el periodo T según la Segunda Ley de Kepler:

$$v = \frac{2\pi r}{T} \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2}.$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación anterior:

$$\frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = \frac{GM_T}{r}.$$

Despejando T:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM_T} \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM_T}},$$

que es la Tercera Ley de Kepler. Para calcular el periodo de *Sentinel-1*, sumamos el radio de la Tierra y la altura orbital:

$$r = R_T + h = (6{,}37\cdot 10^6\,\text{m}) + (0{,}7\cdot 10^6\,\text{m}) = 7{,}07\cdot 10^6\,\text{m}.$$

Sustituyendo los valores:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(7{,}07\cdot 10^6\,\text{m})^3}{6{,}67\cdot 10^{-11}\,\text{N}\,\text{m}^2\,\text{kg}^{-2}\cdot 5{,}97\cdot 10^{24}\,\text{kg}}} = 2\pi\sqrt{\frac{3{,}53\cdot 10^{21}\,\text{m}^3}{3{,}985\cdot 10^{14}\,\text{m}^3\,\text{s}^{-2}}} = 5919{,}14\,\text{s}.$$

Por lo tanto, *Sentinel-1* tarda 5919,14 segundos en completar una órbita.

b) **Deduzca la expresión de la energía mecánica total de un satélite de masa m en una órbita circular de radio r, expresándola en función de G, M_T, m y r. Obtenga la energía mecánica total del satélite *Sentinel-1*.**

La energía mecánica total es la suma de la energía cinética y la energía potencial gravitatoria:

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_T m}{r}.$$

Como sabemos que $v^2 = \frac{GM_T}{r}$, sustituimos:

$$E_m = \frac{1}{2}m\left(\frac{GM_T}{r}\right) - \frac{GM_T m}{r} = \frac{GM_T m}{2r} - \frac{GM_T m}{r} = -\frac{1}{2}\frac{GM_T m}{r}.$$

Entonces, la energía mecánica total es la mitad negativa de la energía potencial. Calculando para *Sentinel-1*:

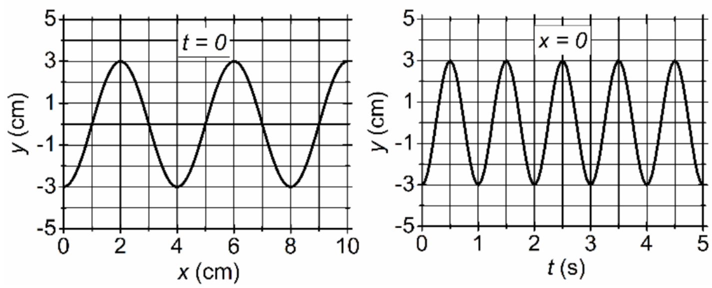
$$E_m = -\frac{1}{2}\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}} \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg} \cdot 2300\,\mathrm{kg}}{7{,}07 \cdot 10^{6}\,\mathrm{m}} = -6{,}477 \cdot 10^{10}\,\mathrm{J}.$$

La energía mecánica total del satélite es $-6{,}477 \cdot 10^{10}$ J.

Pregunta 2. Opción A. Ondas

Una onda armónica transversal se propaga en el sentido positivo del eje x. En la figura se tiene una gráfica de la elongación de la onda para $t = 0$ y para $x = 0$. A partir de dicha información determine:

a) **La expresión matemática de la onda.**
b) **La velocidad de propagación de la onda y la velocidad de oscilación del punto $x = 3\,\mathrm{cm}$ en $t = 1\,\mathrm{s}$.**



Solución:

a) **La expresión matemática de la onda.**

Como la onda se propaga en el sentido positivo del eje x, su expresión general es:

$$y(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \phi).$$

Observando las gráficas, notamos que los máximos de la onda alcanzan $3\,\mathrm{cm}$, por lo que la amplitud es $A = 3\,\mathrm{cm} = 0,03\,m$.

De la gráfica en $x = 0$, vemos que los picos se repiten cada $1\,\mathrm{s}$, lo que indica que el período es $T = 1\,\mathrm{s}$. La frecuencia se calcula como $\nu = \frac{1}{T} = 1\,\mathrm{Hz}$, y por tanto la frecuencia angular es $\omega = 2\pi\nu = 2\pi\,\mathrm{rad/s}$.

En la gráfica para $t = 0$, los máximos están separados por $4\,\mathrm{cm}$, lo que significa que la longitud de onda es $\lambda = 4\,\mathrm{cm} = 0{,}04\,\mathrm{m}$. Por lo tanto, el número de onda es $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0{,}04\,\mathrm{m}} = 50\pi\,\mathrm{m}^{-1}$.

En el punto $x = 0$ y $t = 0$, la elongación es $y(0,0) = -3\,\mathrm{cm}$. Al sustituir en la ecuación general de la onda, obtenemos:

$$y(0,0) = A\cos(\phi) = -A \quad \Rightarrow \quad \cos(\phi) = -1.$$

Esto implica que $\phi = \pi\,\mathrm{rad}$.

Por lo tanto, sustituyendo todos los valores obtenidos en la expresión general, la ecuación de la onda es:

$$\boldsymbol{y(x,t) = 0{,}03\,\cos(2\pi t - 50\pi x + \pi).}$$

b) **La velocidad de propagación de la onda y la velocidad de oscilación del punto $x = 3\,\mathrm{cm}$ en $t = 1\,\mathrm{s}$.**

La velocidad de propagación de la onda se calcula mediante la relación $v = \lambda\nu$. Por lo tanto:

$$v = (0{,}04\,\mathrm{m})(1\,\mathrm{Hz}) = 0{,}04\,\mathrm{m/s}.$$

La velocidad de oscilación en un punto específico se obtiene derivando la función de la onda respecto al tiempo:

$$v_{\text{osc}}(x,t) = \frac{\partial y}{\partial t} = -A\omega \sin(\omega t - kx + \phi).$$

Sustituyendo los valores conocidos:

$$v_{\text{osc}}(x,t) = -0{,}03 \cdot 2\pi \cdot \sin(2\pi t - 50\pi x + \pi) = -0{,}06\pi \cdot \sin(2\pi t - 50\pi x + \pi).$$

Evaluamos esta expresión en $x = 3\,\text{cm} = 0{,}03\,\text{m}$ y $t = 1\,\text{s}$:

$$v_{\text{osc}}(0{,}03\,\text{m}, 1\,\text{s}) = -0{,}06\pi \cdot \sin\left(2\pi(1\,\text{s}) - 50\pi(0{,}03\,\text{m}) + \pi\right) = 0{,}06\pi\,\text{m/s}.$$

Por lo tanto, la velocidad de propagación de la onda es $0{,}04\,\text{m/s}$ y la velocidad de oscilación en $x = 3\,\text{cm}$ y $t = 1\,\text{s}$ es $0{,}06\pi\,\text{m/s}$.

Pregunta 3. Opción A. Campo Electromagnético

Dos cargas puntuales $Q_1 = 2\,\text{nC}$ y $Q_2 = -4\,\text{nC}$ se encuentran en el plano (x, y) en los puntos $P_1(1, 0)$ m y $P_2(3, 0)$ m, respectivamente. Calcule:

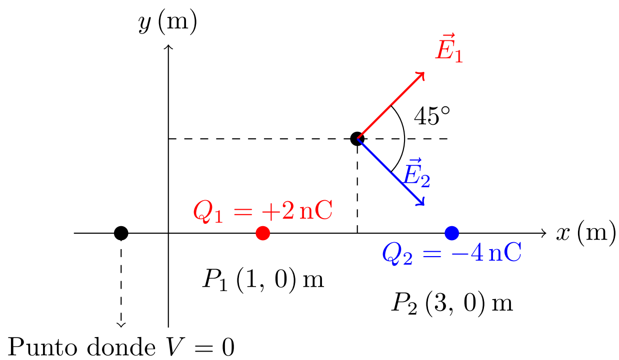
a) **El campo eléctrico creado por ambas cargas en el punto $(2, 1)$ m.**
b) **Las coordenadas del punto del eje x situado a la izquierda de la carga Q_1 ($x < 1$ m) en el que el potencial electrostático creado por ambas cargas es cero.**

Dato: Constante de la ley de Coulomb, $K = 9{,}0 \cdot 10^9$ N m^{2}C^{-2}.

Solución:

a) **El campo eléctrico creado por ambas cargas en el punto $(2, 1)$ m.**

Comenzamos representando la situación descrita por el ejercicio:



Para determinar el campo eléctrico en el punto $(2,\,1)$ m debido a las cargas Q_1 y Q_2, observamos que los vectores de campo eléctrico $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ forman un ángulo de 45° con respecto al eje x, como se muestra en la figura. Primero, calculamos la distancia desde cada carga hasta el punto de interés utilizando el Teorema de Pitágoras:

$$r_1 = \sqrt{(2-1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}\,\text{m},$$
$$r_2 = \sqrt{(2-3)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}\,\text{m}.$$

Las distancias son iguales debido a la simetría en la disposición de las cargas. A continuación, calculamos los módulos de los campos eléctricos producidos por cada carga:

$$E_1 = \frac{k|Q_1|}{r_1^2} = \frac{9{,}0 \cdot 10^9\,\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2} \cdot 2{,}0 \cdot 10^{-9}\,\text{C}}{(\sqrt{2}\,\text{m})^2} = \frac{18\,\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-1}}{2\,\text{m}^2} = 9\,\text{N/C},$$

$$E_2 = \frac{k|Q_2|}{r_2^2} = \frac{9{,}0 \cdot 10^9\,\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2} \cdot 4{,}0 \cdot 10^{-9}\,\text{C}}{2\,\text{m}^2} = \frac{36\,\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-1}}{2\,\text{m}^2} = 18\,\text{N/C}.$$

Ahora, descomponemos cada campo eléctrico en sus componentes x e y. Para $\vec{E}_1$, debido a que Q_1 es positiva, el campo eléctrico apunta alejándose de la carga:

$$E_{1x} = E_1 \cos(45°) = 9\,\text{N/C} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 6{,}36\,\text{N/C},$$

$$E_{1y} = E_1 \sin(45°) = 9\,\text{N/C} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 6{,}36\,\text{N/C}.$$

Para $\vec{E}_2$, como Q_2 es negativa, el campo eléctrico apunta hacia la carga:

$$E_{2x} = E_2 \cos(45°) = 18\,\text{N/C} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 12{,}73\,\text{N/C},$$

$$E_{2y} = -E_2 \sin(45°) = -18\,\mathrm{N/C} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -12{,}73\,\mathrm{N/C}.$$

Notamos que E_{2y} es negativo porque el campo eléctrico apunta en dirección negativa del eje y. Sumamos las componentes de los campos para obtener el campo eléctrico total en el punto:

$$E_{\text{total},\,x} = E_{1x} + E_{2x} = 6{,}36\,\mathrm{N/C} + 12{,}73\,\mathrm{N/C} = 19{,}09\,\mathrm{N/C},$$

$$E_{\text{total},\,y} = E_{1y} + E_{2y} = 6{,}36\,\mathrm{N/C} + (-12{,}73\,\mathrm{N/C}) = -6{,}37\,\mathrm{N/C}.$$

Por lo tanto, el campo eléctrico total en el punto (2, 1) m es:

$$\boldsymbol{\vec{E}_{\text{total}} = E_{\text{total},\,x}\,\vec{\imath} + E_{\text{total},\,y}\,\vec{\jmath} = (19{,}09\,\vec{\imath} - 6{,}37\,\vec{\jmath})\,\mathrm{N/C}.}$$

b) Las coordenadas del punto del eje x situado a la izquierda de la carga Q_1 ($x < 1\,\mathrm{m}$) en el que el potencial electrostático creado por ambas cargas es cero.

Consideremos un punto en el eje x con coordenadas $(x, 0)$, donde $x < 1\,\mathrm{m}$. El potencial eléctrico en ese punto debido a las cargas Q_1 y Q_2 es la suma de los potenciales individuales:

$$V_{\text{total}} = V_1 + V_2,$$

donde

$$V_1 = \frac{kQ_1}{|x - x_1|} \quad \text{y} \quad V_2 = \frac{kQ_2}{|x - x_2|},$$

y $x_1 = 1\,\mathrm{m}$ y $x_2 = 3\,\mathrm{m}$ son las posiciones de las cargas Q_1 y Q_2, respectivamente. Queremos encontrar el valor de x tal que $V_{\text{total}} = 0$:

$$V_1 + V_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{kQ_1}{|x-1|} + \frac{kQ_2}{|x-3|} = 0.$$

Dividimos ambos lados por k y reordenamos la ecuación:

$$\frac{Q_1}{|x-1|} + \frac{Q_2}{|x-3|} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{Q_1}{|x-1|} = -\frac{Q_2}{|x-3|}.$$

Sustituimos los valores de las cargas ($Q_1 = +2\,\mathrm{nC}$ y $Q_2 = -4\,\mathrm{nC}$):

$$\frac{2\,\mathrm{nC}}{|x-1|} = -\frac{-4\,\mathrm{nC}}{|x-3|} \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{|x-1|} = \frac{4}{|x-3|}.$$

Simplificamos la ecuación:

$$\frac{|x-3|}{|x-1|} = 2.$$

Como estamos analizando puntos donde $x < 1\,\mathrm{m}$, las expresiones $(x-1)$ y $(x-3)$ son negativas, por lo que sus valores absolutos son:

$$|x-1| = -(x-1) = 1 - x \quad \text{y} \quad |x-3| = -(x-3) = 3 - x.$$

Sustituyendo en la ecuación anterior:

$$\frac{3-x}{1-x} = 2.$$

Resolvemos para x:

$$3 - x = 2(1-x) \quad \Rightarrow \quad 3 - x = 2 - 2x \quad \Rightarrow \quad x = -1\,\mathrm{m}.$$

Por lo tanto, el punto buscado es (−1, 0).

Pregunta 4. Opción A. Óptica

Se sitúa un objeto de altura h a la izquierda de una lente convergente de distancia focal f'. La imagen del objeto que se forma es real, invertida y de igual tamaño.

a) **Determine, en función de f', las posiciones del objeto y de la imagen con respecto a la lente.**
b) **Realice el correspondiente trazado de rayos para la formación de la imagen.**

Solución:

a) **Determine, en función de f', las posiciones del objeto y de la imagen con respecto a la lente.**

El aumento lateral (M_L) de una imagen es la relación entre el tamaño de la imagen (y') y el tamaño del objeto (y), y también se relaciona con las distancias desde la lente al objeto (s) y a la imagen (s'):

$$M_L = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s}.$$

Como la imagen es real, invertida y del mismo tamaño que el objeto, entonces el aumento es $M_L = -1$. Así,

$$\frac{s'}{s} = -1 \quad \Rightarrow \quad s' = -s.$$

Utilizando la ecuación fundamental de las lentes delgadas:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'}.$$

Sustituyendo $s' = -s$ en la ecuación:

$$\frac{1}{-s} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} \quad \Rightarrow \quad -\frac{2}{s} = \frac{1}{f'}.$$

Despejando s:

$$s = -2f'.$$

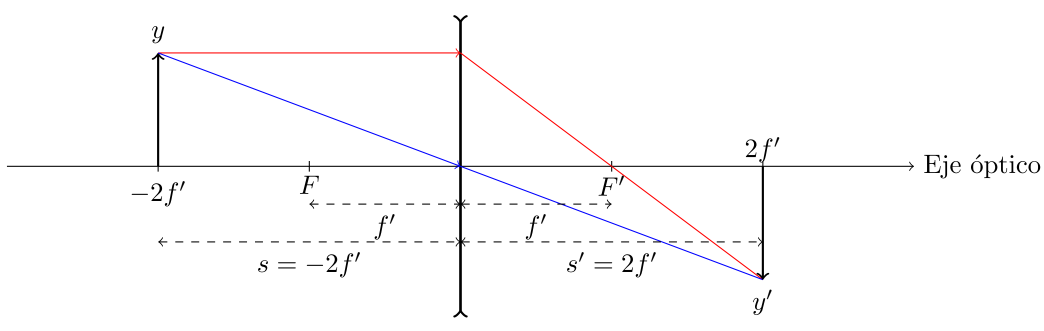
Y como $s' = -s$, entonces:

$$s' = -(-2f') = 2f'.$$

Por lo tanto, el objeto está situado a una distancia $s = -2f'$ (a la izquierda de la lente) y la imagen se forma a una distancia $s' = 2f'$ (a la derecha de la lente).

b) **Realice el correspondiente trazado de rayos para la formación de la imagen.**

A continuación, se presenta el diagrama que muestra el trazado de rayos para la formación de la imagen en una lente convergente:



Pregunta 5. Opción A. Física Moderna

En el acelerador de partículas del CERN se tiene un protón moviéndose con una velocidad un 90% de la velocidad de la luz, siendo su masa relativista de $3,83 \cdot 10^{-27}$ kg. Determine:

a) **La masa en reposo del protón.**
b) **La energía cinética que posee el protón, expresada en eV.**

Datos: Velocidad de la luz en el vacío, $c = 3{\cdot}10^8$ m s^{-1}; Valor absoluto de la carga del electrón, $e = 1,6{\cdot}10^{-19}$ C.

Solución:

a) **La masa en reposo del protón.**

La masa relativista m está relacionada con la masa en reposo m_0 mediante la ecuación de la relatividad especial:

$$m = \gamma m_0,$$

donde γ es el factor de Lorentz, definido como:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}.$$

Dado que el protón se mueve al 90% de la velocidad de la luz ($v = 0{,}9c$), calculamos γ:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(0{,}9c)^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0{,}81}} = \frac{1}{\sqrt{0{,}19}} = 2{,}29.$$

Ahora, despejamos la masa en reposo m_0 de la relación inicial:

$$m_0 = \frac{m}{\gamma} = \frac{3{,}83 \cdot 10^{-27}\,\text{kg}}{2{,}29} = 1{,}67 \cdot 10^{-27}\,\text{kg}.$$

Por lo tanto, la masa en reposo del protón es aproximadamente $1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg.

b) **La energía cinética que posee el protón, expresada en eV.**

La energía cinética relativista se calcula mediante:

$$E_c = (\gamma - 1)m_0c^2.$$

Sustituyendo los valores conocidos:

$$E_c = (2{,}29 - 1)(1{,}67 \cdot 10^{-27}\,\text{kg})(3{,}0 \cdot 10^8\,\text{m/s})^2 = 1{,}94 \cdot 10^{-10}\,\text{J}.$$

Para convertir la energía a electronvoltios (eV), utilizamos que $1\,\text{eV} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ J:

$$E_c = \frac{1{,}94 \cdot 10^{-10}\,\text{J}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\text{J/eV}} = 1{,}21 \cdot 10^9\,\text{eV}.$$

Por lo tanto, la energía cinética del protón es aproximadamente $1{,}21 \cdot 10^9$ eV.

Pregunta 1. Opción B. Campo Gravitatorio

En el punto $(1, 0)$ m del plano (x, y) se encuentra una partícula A de masa $m_A = 2$ kg. Se sabe que para llevar una partícula B de masa m_B desde el origen de coordenadas al punto $(0, 2)$ m el trabajo realizado por la fuerza del campo gravitatorio creado por la masa m_A es $-2,95 \cdot 10^{-10}$ J.

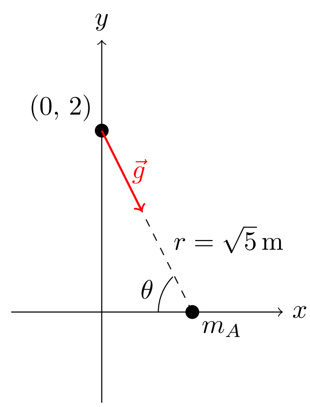
a) **¿Cuál es el valor de la masa m_B?**
b) **Calcule el valor del campo gravitatorio que crea la masa m_A en el punto $(0, 2)$ m.**

Dato: Constante de Gravitación Universal, $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N m^{2}kg^{-2}.

Solución:

a) **¿Cuál es el valor de la masa m_B?**

Comenzamos con un sencillo dibujo que también nos serivrá para el siguiente apartado:



Para determinar la masa m_B, utilizamos el hecho de que el trabajo realizado por el campo gravitatorio es igual al negativo del cambio en la energía potencial gravitatoria:

$$W = -\Delta E_p = -[E_p(r_f) - E_p(r_0)].$$

La energía potencial gravitatoria entre dos masas es:

$$E_p(r) = -\frac{G m_A m_B}{r}.$$

La partícula B se mueve desde el origen $(0, 0)$ hasta el punto $(0,\ 2)$ m. Primero, calculamos las distancias inicial y final entre las masas m_A y m_B:

- Distancia inicial (r_0) desde m_A en $(1,\ 0)$ al origen:

$$r_0 = \sqrt{(1-0)^2 + (0-0)^2} = 1\,\text{m}.$$

- Distancia final (r_f) desde m_A hasta el punto $(0,\ 2)$:

$$r_f = \sqrt{(1-0)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}\,\text{m}.$$

Sustituyendo en la expresión del trabajo:

$$W = -\left[E_p(r_f) - E_p(r_0)\right] = -\left[-\frac{G m_A m_B}{r_f} + \frac{G m_A m_B}{r_0}\right] = G m_A m_B \left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_0}\right).$$

Despejando m_B:

$$m_B = \frac{W}{G m_A \left(\dfrac{1}{r_f} - \dfrac{1}{r_0}\right)}.$$

Sustituyendo los valores numéricos:

$$m_B = \frac{-2{,}95 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{J}}{6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}} \cdot 2\,\mathrm{kg}\left(\frac{1}{\sqrt{5}\,\mathrm{m}} - \frac{1}{1\,\mathrm{m}}\right)} = 4\,\mathrm{kg}.$$

Por lo tanto, la masa m_B es 4 kg.

b) **Calcule el valor del campo gravitatorio que crea la masa m_A en el punto $(0, 2)$ m.**

Sabemos que la distancia r desde m_A en (1, 0) hasta el punto (0, 2) es

$$r = \sqrt{(1-0)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}\,\mathrm{m}.$$

El módulo del campo gravitatorio es:

$$g = \frac{Gm_A}{r^2} = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}} \cdot 2\,\mathrm{kg}}{(\sqrt{5}\,\mathrm{m})^2} = 2{,}668 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m/s^2}.$$

El campo gravitatorio es un vector dirigido hacia la masa m_A. Para encontrar sus componentes, calculamos primero:

$$\cos\theta = \frac{\Delta x}{r} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{y} \quad \sin\theta = \frac{\Delta y}{r} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Las componentes del campo gravitatorio son:

$$g_x = -g\cos\theta = -2{,}668 \cdot 10^{-11} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 1{,}192 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m/s^2},$$

$$g_y = -g\sin\theta = -2{,}668 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = -2{,}384 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m/s^2}.$$

Por lo tanto, el campo gravitatorio en el punto (0, 2) m es:

$$\boldsymbol{\vec{g} = g_x\,\vec{\imath} + g_y\,\vec{\jmath} = 1{,}192 \cdot 10^{-11}\,\vec{\imath} - 2{,}384 \cdot 10^{-11}\,\vec{\jmath}\ \mathrm{m/s^2}.}$$

Pregunta 2. Opción B. Ondas

En el centro de una pista de baile circular de una discoteca el nivel de intensidad sonora es de 100 dB. La discoteca dispone de cuatro altavoces idénticos dispuestos alrededor de la pista de baile, todos ellos a la misma distancia del centro de la pista, $d = 10\,\text{m}$.

a) **Determine la potencia de cada uno de los altavoces de la discoteca.**

b) **Si el oído humano tiene una superficie de $2 \cdot 10^{-4}\,\text{m}^2$, y una persona permanece 5 horas bailando en el centro de la pista, ¿cuál es la energía sonora total que le llega al oído?**

Dato: Intensidad umbral de audición, $I_0 = 10^{-12}$ W m^{-2}.

Solución:

a) **Determine la potencia de cada uno de los altavoces de la discoteca.**

El nivel de intensidad sonora en decibelios (β) se relaciona con la intensidad (I) mediante la fórmula:

$$\beta = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right).$$

Despejando I, obtenemos:

$$I = I_0 \cdot 10^{\beta/10}.$$

Dado que $I_0 = 10^{-12}\,\text{W/m}^2$ y $\beta = 100\,\text{dB}$:

$$I = 10^{-12}\,\text{W/m}^2 \cdot 10^{100/10} = 10^{-12}\,\text{W/m}^2 \cdot 10^{10} = 10^{-2}\,\text{W/m}^2.$$

Esta es la intensidad total en el centro de la pista, producida por los cuatro altavoces. Como los altavoces son idénticos y están a la misma distancia, la intensidad aportada por cada uno es:

$$I_{\text{alt}} = \frac{I}{4} = \frac{10^{-2}\,\text{W/m}^2}{4} = 2{,}5 \cdot 10^{-3}\,\text{W/m}^2.$$

La intensidad sonora a una distancia r de una fuente puntual de potencia P es:

$$I_{\text{alt}} = \frac{P_{\text{alt}}}{S} = \frac{P_{\text{alt}}}{4\pi r^2}.$$

Despejando la potencia de cada altavoz P_{alt}:

$$P_{\text{alt}} = I_{\text{alt}} \cdot 4\pi r^2 = (2{,}5 \cdot 10^{-3}\,\text{W/m}^2) \cdot 4\pi (10\,\text{m})^2 = \pi\,\text{W}.$$

Por lo tanto, la potencia de cada altavoz es π vatios.

b) **Si el oído humano tiene una superficie de $2 \cdot 10^{-4}\,\text{m}^2$, y una persona permanece 5 horas bailando en el centro de la pista, ¿cuál es la energía sonora total que le llega al oído?**

La potencia que recibe el oído se calcula multiplicando la intensidad por el área del oído:

$$P_{\text{oído}} = I \cdot S_{\text{oído}} = (10^{-2}\,\text{W/m}^2) \cdot (2 \cdot 10^{-4}\,\text{m}^2) = 2 \cdot 10^{-6}\,\text{W}.$$

La energía total E recibida durante el tiempo t es:

$$E = P_{\text{oído}} \cdot t,$$

donde t es el tiempo en segundos:

$$t = 5\,\text{horas} \cdot 3600\,\text{s/hora} = 18\,000\,\text{s}.$$

Entonces,

$$E = (2 \cdot 10^{-6}\,\text{W}) \cdot 18\,000\,\text{s} = 0{,}036\,\text{J}.$$

Por lo tanto, la energía sonora total que llega al oído es 0,036 J.

Pregunta 3. Opción B. Campo Electromagnético

Una espira cuadrada de 20 cm de lado se somete a la acción de un campo magnético variable con el tiempo $B(t)$ perpendicular al plano de la espira. Halle el flujo magnético y la f.e.m. inducida en la espira en el tiempo $t = 2\,\mathrm{s}$ en los siguientes casos:

a) **Cuando el campo magnético es $B(t) = Kt$, con K igual a $2 \cdot 10^{-3}$ T s^{-1}.**
b) **Cuando el campo magnético es $B(t) = 3 \cdot 10^{-3} \cos(3\pi t)$, donde B está en T y t está en s.**

Solución:

a) **Cuando el campo magnético es $B(t) = Kt$, con K igual a $2 \cdot 10^{-3}$ T s^{-1}.**

Dado que el campo magnético es perpendicular al plano de la espira, el flujo magnético $\Phi(t)$ a través de ella se calcula como:

$$\Phi(t) = B(t) \cdot S,$$

donde S es el área de la espira. Para una espira cuadrada de lado $L = 20\,\mathrm{cm} = 0{,}2\,\mathrm{m}$, el área es:

$$S = L^2 = (0{,}2\,\mathrm{m})^2 = 0{,}04\,\mathrm{m}^2.$$

Entonces, el flujo magnético en función del tiempo es:

$$\Phi(t) = Kt \cdot S = (2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{T\ s^{-1}}) \cdot t \cdot 0{,}04\,\mathrm{m}^2 = 8 \cdot 10^{-5}\, t\,\mathrm{Wb}.$$

Evaluando en $t = 2\,\mathrm{s}$:

$$\Phi(2\,\mathrm{s}) = 8 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{Wb/s} \cdot 2\,\mathrm{s} = 1{,}6 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{Wb}.$$

Para determinar la f.e.m. inducida, aplicamos la ley de Faraday:

$$\varepsilon(t) = -\frac{d\Phi(t)}{dt}.$$

Calculamos la derivada del flujo:

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = 8 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{Wb/s}.$$

Por ende, la f.e.m. inducida es:

$$\varepsilon(t) = -8 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{V}.$$

Observamos que la f.e.m. inducida es constante en el tiempo.

Por lo tanto, el flujo magnético es $1{,}6 \cdot 10^{-4}$ Wb y la f.e.m. inducida es $-8 \cdot 10^{-5}$ V en el tiempo $t = 2\,\mathrm{s}$.

b) **Cuando el campo magnético es $B(t) = 3 \cdot 10^{-3} \cos(3\pi t)$, donde B está en T y t está en s.**

Nuevamente, calculamos el flujo magnético:

$$\Phi(t) = B(t) \cdot S = \big(3 \cdot 10^{-3} \cos(3\pi t)\big) \cdot 0{,}04\,\mathrm{m}^2 = 1{,}2 \cdot 10^{-4} \cos(3\pi t)\,\mathrm{Wb}.$$

Evaluando en $t = 2\,\mathrm{s}$:

$$\Phi(2\,\mathrm{s}) = 1{,}2 \cdot 10^{-4} \cos(6\pi)\,\mathrm{Wb} = 1{,}2 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{Wb}.$$

Para la f.e.m. inducida, aplicamos:

$$\varepsilon(t) = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = -S\frac{dB(t)}{dt}.$$

Calculamos la derivada del campo magnético:

$$\frac{dB(t)}{dt} = -3 \cdot 10^{-3} \cdot 3\pi \sin(3\pi t) = -9\pi \cdot 10^{-3} \sin(3\pi t).$$

Entonces, la f.e.m. inducida es:

$$\varepsilon(t) = -S\left(-9\pi \cdot 10^{-3} \sin(3\pi t)\right) = 0{,}04 \cdot 9\pi \cdot 10^{-3} \sin(3\pi t) = 3{,}6\pi \cdot 10^{-4} \sin(3\pi t)\,\mathrm{V}.$$

Evaluando en $t = 2\,\mathrm{s}$:

$$\varepsilon(2\,\mathrm{s}) = 3{,}6\pi \cdot 10^{-4} \sin(6\pi)\,\mathrm{V}.$$

Como $\sin(6\pi) = 0$, entonces:

$$\varepsilon(2\,\mathrm{s}) = 0\,\mathrm{V}.$$

Por lo tanto, en $t = 2\,\mathrm{s}$, el flujo magnético es $1{,}2 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{Wb}$ y la f.e.m. inducida es $0\,\mathrm{V}$.

Pregunta 4. Opción B. Ondas

Un estanque con agua está cubierto con una capa de aceite. Los índices de refracción del agua y del aceite son $n_{agua} = 1,33$ y $n_{aceite} = 1,44$, respectivamente.

a) **Si un rayo de luz monocromático incide desde el aire hacia el estanque con un ángulo de 40° con respecto a la normal, ¿cuál es el ángulo de refracción del haz en el agua del estanque?**

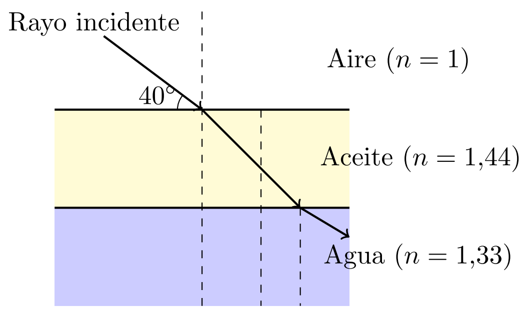
b) **Si en el fondo del estanque hay un foco de luz, ¿por debajo de qué ángulo debe incidir el haz de luz del foco con respecto a la normal de la superficie del agua para que la luz salga fuera del estanque hacia el aire?**

Dato: Índice de refracción del aire, $n_{aire} = 1$.

Solución:

a) **Si un rayo de luz monocromático incide desde el aire hacia el estanque con un ángulo de 40° con respecto a la normal, ¿cuál es el ángulo de refracción del haz en el agua del estanque?**

El rayo de luz atraviesa dos interfaces: primero pasa del aire al aceite y luego del aceite al agua. Aplicaremos la ley de Snell en ambas interfaces.



Paso 1: Aire a Aceite

La ley de Snell establece que:

$$n_{\text{aire}} \sin\theta_{\text{aire}} = n_{\text{aceite}} \sin\theta_{\text{aceite}} \quad \Rightarrow \quad 1 \cdot \sin 40° = 1{,}44 \cdot \sin\theta_{\text{aceite}}.$$

Despejamos θ_{aceite}:

$$\theta_{\text{aceite}} = \arcsin\left(\frac{\sin 40°}{1{,}44}\right) = 26{,}51°.$$

Paso 2: Aceite a Agua

Aplicamos nuevamente la ley de Snell:

$$n_{\text{aceite}} \sin\theta_{\text{aceite}} = n_{\text{agua}} \sin\theta_{\text{agua}} \quad \Rightarrow \quad 1{,}44 \cdot \sin 26{,}51° = 1{,}33 \cdot \sin\theta_{\text{agua}}.$$

Calculamos θ_{agua}:

$$\theta_{\text{agua}} = \arcsin\left(\frac{1{,}44 \cdot \sin 26{,}51°}{1{,}33}\right) = 28{,}90°.$$

Por lo tanto, el ángulo de refracción del haz en el agua es 28,90°.

b) **Si en el fondo del estanque hay un foco de luz, ¿por debajo de qué ángulo debe incidir el haz de luz del foco con respecto a la normal de la superficie del agua para que la luz salga fuera del estanque hacia el aire?**

Primero, calculamos el ángulo crítico en la interfaz aceite-aire, donde la refracción pasa a ser reflexión total interna. La condición para el ángulo límite es cuando el ángulo de refracción en el aire es 90°:

$$n_{\text{aceite}} \sin\theta_{\text{aceite-crítico}} = n_{\text{aire}} \sin 90^\circ.$$

Como $\sin 90^\circ = 1$, tenemos:

$$\sin\theta_{\text{aceite-crítico}} = \frac{n_{\text{aire}}}{n_{\text{aceite}}} = \frac{1}{1{,}44} = 0{,}6944.$$

Entonces,

$$\theta_{\text{aceite-crítico}} = \arcsin(0{,}6944) = 43{,}98^\circ.$$

Para el cálculo del ángulo máximo en el agua aplicamos la ley de Snell entre el agua y el aceite:

$$n_{\text{agua}} \sin\theta_{\text{agua-máx}} = n_{\text{aceite}} \sin\theta_{\text{aceite-crítico}}.$$

Despejamos $\sin\theta_{\text{agua-máx}}$:

$$\sin\theta_{\text{agua-máx}} = \frac{n_{\text{aceite}} \sin\theta_{\text{aceite-crítico}}}{n_{\text{agua}}} = \frac{1{,}44 \cdot 0{,}6944}{1{,}33} = \frac{1{,}0}{1{,}33} = 0{,}7519.$$

Luego,

$$\theta_{\text{agua-máx}} = \arcsin(0{,}7519) = 48{,}75^\circ.$$

Por lo tanto, el haz de luz debe incidir desde el agua con un ángulo menor a 48,75° respecto a la normal para que pueda atravesar todas las interfaces y salir al aire.

Pregunta 5. Opción B. Física Moderna

El isótopo de americio, ^{241}Am, se ha utilizado para la fabricación de detectores de humo. Si la cantidad de americio ^{241}Am en un detector de humo en el momento de su fabricación es de 0,2 miligramos y su tiempo de vida media, τ, es de 432 años, determine:

a) **El tiempo de semidesintegración del ^{241}Am y la actividad inicial del detector de humo.**
b) **La cantidad de ^{241}Am en el detector de humo cuando su actividad haya disminuido un 80% respecto de su valor inicial y el tiempo transcurrido.**

Datos: Masa atómica del ^{241}Am, $M_{Am} = 241$ u; Número de Avogadro, $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ mol^{-1}.

Solución:

a) **El tiempo de semidesintegración del ^{241}Am y la actividad inicial del detector de humo.**

El tiempo de vida media τ está relacionado con la constante de desintegración λ mediante:

$$\tau = \frac{1}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{1}{\tau}.$$

Primero, convertimos el tiempo de vida media a segundos:

$$\tau = 432\,\text{años} \cdot 365\,\frac{\text{días}}{\text{año}} \cdot 24\,\frac{\text{horas}}{\text{día}} \cdot 3600\,\frac{\text{s}}{\text{hora}} = 1{,}36 \cdot 10^{10}\,\text{s}.$$

Entonces, la constante de desintegración es:

$$\lambda = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{1{,}36 \cdot 10^{10}\,\text{s}} = 7{,}35 \cdot 10^{-11}\,\text{s}^{-1}.$$

El tiempo de semidesintegración $T_{1/2}$ se relaciona con λ mediante:

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0{,}6931}{7{,}35 \cdot 10^{-11}\,\text{s}^{-1}} = 9{,}44 \cdot 10^{9}\,\text{s} \approx 300\,\text{años}.$$

Para calcular la actividad inicial A_0, necesitamos conocer el número inicial de núcleos radiactivos N_0. Primero, convertimos la masa inicial a moles:

$$n = \frac{m}{M_{\text{Am}}} = \frac{0{,}2 \cdot 10^{-3}\,\text{g}}{241\,\text{g/mol}} = 8{,}30 \cdot 10^{-7}\,\text{mol}.$$

Luego, calculamos N_0 utilizando el número de Avogadro:

$$N_0 = nN_A = (8{,}30 \cdot 10^{-7}\,\text{mol}) \cdot (6{,}02 \cdot 10^{23}\,\text{mol}^{-1}) = 5{,}00 \cdot 10^{17}\,\text{núcleos}.$$

Ahora, la actividad inicial es:

$$A_0 = \lambda N_0 = (7{,}35 \cdot 10^{-11}\,\text{s}^{-1}) \cdot (5{,}00 \cdot 10^{17}) = 3{,}67 \cdot 10^{7}\,\text{Bq}.$$

El tiempo de semidesintegración es aproximadamente 300 años y la actividad inicial del detector es $3{,}67 \cdot 10^7$ Bq.

b) **La cantidad de ^{241}Am en el detector de humo cuando su actividad haya disminuido un 80% respecto de su valor inicial y el tiempo transcurrido.**

Si la actividad ha disminuido un 80%, esto significa que la actividad actual A es el 20% de la inicial:

$$A = 0{,}2\,A_0.$$

La actividad en función del tiempo está dada por:

$$A(t) = A_0 e^{-\lambda t}.$$

Igualando y despejando t:

$$0{,}2\,A_0 = A_0 e^{-\lambda t} \quad \Rightarrow \quad 0{,}2 = e^{-\lambda t} \quad \Rightarrow \quad \ln(0{,}2) = -\lambda t \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{\ln(0{,}2)}{\lambda}.$$

Calculamos t:

$$t = -\frac{\ln(0{,}2)}{7{,}35 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{s}^{-1}} = \frac{1{,}6094}{7{,}35 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{s}^{-1}} = 2{,}19 \cdot 10^{10}\,\mathrm{s} \approx 700\,\text{años}.$$

La cantidad de americio restante se calcula con:

$$N = N_0 e^{-\lambda t} = N_0 \cdot 0{,}2 = 0{,}2\,N_0 = 1{,}00 \cdot 10^{17}\,\text{núcleos}.$$

Por lo tanto, han transcurrido aproximadamente 700 años, y la cantidad de ^{241}Am en el detector es $1{,}00 \cdot 10^{17}$ núcleos.